**Teoria miary**
WPPT IIr. semestr zimowy 2011/12
KOLOKWIUM

7/12/2011

**Zadanie 1**
Dana jest przestrzeń miarowa $(X, \Sigma, \mu)$. Opisz $\sigma(\{A \in \Sigma : \mu(A) = 0\})$.
(Udowodnij, że to co podasz jest faktycznie sigma-ciałem).

**Zadanie 2**
Na przestrzeni $X$ dane są dwie miary zewnętrzne $\mu$ i $\nu$.
a) Wykaż, że funkcja zbioru $\xi(A) = \max\{\mu(A), \nu(A)\}$ jest miarą zewnętrzną.
b) Podaj przykład na to, że $\eta(A) = \min\{\mu(A), \nu(A)\}$ nie musi być miarą zewnętrzną (wystarczy do tego przestrzeń $X$ składająca się z dwóch punktów).

**Zadanie 3.**
Wiemy, że na prostej $\mathbb{R}$ z miarą Lebesgue'a $\lambda$, dla każdego zbioru mierzalnego $A$ o mierze skończonej i dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $U \supset A$ taki, że $\lambda(U) < \lambda(A) + \epsilon$.

Korzystając z tego wykaż, że dla dowolnego zbioru $A$ (nawet miary nieskończonej) i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $U \supset A$ taki, że $\lambda(U \setminus A) < \epsilon$.

**Zadanie 4.**
Czy z mierzalności funkcji prostej $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ w postaci ogólnej (nie zakładamy, że zbiory $A_i$ są rozłączne) wynika, że zbiory $A_i$ są mierzalne?

**Zadanie 5.**
Udowodnij, że miara Lebesgue'a na prostej jest "jednorodna", tzn. dla dowolnego $\alpha > 0$ i dowolnego zbioru mierzalnego $A$ zachodzi $\mu(\alpha A) = \alpha\mu(A)$, gdzie $\alpha A = \{\alpha x : x \in A\}$.
*Wsk. A może wystarczy sprawdzić, że to zachodzi dla przedziałów?*

Tomasz Downarowicz